

[21-BA 428-B/ 21-BS 432 -B]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – IV (B) – LINEAR ALGEBRA

(COMMON FOR B.A., B.Sc.)

(UG PROGRAM (4 YEARS HONORS))

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time: 3 Hours

Max. Marks: 75

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

1. Show that the vectors $(1, 3, 2), (1, -7, -8), (2, 1, -1)$ of $V_3(R)$ are linearly dependent.

$V_3(R)$ యొక్క $(1, 3, 2), (1, -7, -8), (2, 1, -1)$ సదిశలు ఋజు పరాధీనమని చూపండి.

2. If S, T are subsets of $V(F)$, then prove that

$V(F)$ నకు S, T లు ఉపసమితులయితే

(a) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$

(b) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

3. If α, β, γ are linearly independent vectors of $V(F)$ where F is the field of complex numbers then so also are $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$.

$V(F)$ యొక్క α, β, γ లు ఋజు స్వాతంత్ర్య సదిశలయితే $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ లు కూడా ఋజు స్వాతంత్ర్యాలని చూపండి

4. Find the coordinates of $(2i, 3+4i, 5i)$ w.r.t. the basis $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ of $C^3(C)$.

$C^3(C)$ నకు $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ ఆధారం దృష్ట్యా $(2i, 3+4i, 5i)$ సదిశకు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

5. Show that the mapping $T: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ defined as $T(a,b) = (a+b, a-b, b)$ is a linear transformation from $V_2(R)$ into $V_3(R)$.

$T: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ ని $T(a,b) = (a+b, a-b, b)$ అని నిర్వచించిన, T అనేది $V_2(R)$ నుండి $V_3(R)$ కి ఋజు పరివర్తన అని చూపండి.

6. If $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are the characteristic roots of A then prove that $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ are characteristic roots of A^2 .

A యొక్క లాక్షణిక మూలాలు $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ అయితే A^2 యొక్క లాక్షణిక మూలాలు $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ అని నిరూపించండి.

7. State and prove triangle inequality.

త్రిభుజ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించండి.

8. Prove that $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ is an orthonormal set in R^3 .

$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$ R^3 లో ఒక లంబాభిలంబ సమితి అని ఋజువు చేయండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions

9. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a non empty subset W of a vector space $V(F)$ to be subspace of V are

(a) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(b) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళమునకు W శూన్యేతర ఉపసమితి, V కి W ఉపాంతరాళము అగుటకు అవశ్యక, పర్యాప్త నియమము.

(a) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(b) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

అని నిరూపించుము.

Or

(b) If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that

$$L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2.$$

$V(F)$ సదిశాంతరాళమునకు W_1 మరియు W_2 రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే $L(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$ అని నిరూపించండి.

10. (a) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$. Then prove that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళం $V(F)$ కి W_1 మరియు W_2 రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ అని నిరూపించండి.

Or

- (b) Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space of dimension ' n ' and W be the subspace of V . Then prove that W is a finite dimensional vector space, if $\dim W \leq n$.

$V(F)$ అనేది పరిమాణము ' n ' యొక్క పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళం మరియు W అనేది V యొక్క ఉపాంతరాళము అనుకొనుము. $\dim W \leq n$ అయితే, W అనేది పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము అని నిరూపించండి.

11. (a) If $T : U(F) \rightarrow V(F)$ be a linear transformation and U is finite dimensional then prove that Range of T is a finite dimensional subspace of $V(F)$.

$T : U(F) \rightarrow V(F)$ ఒక ఏక ఘాత రూపాంతరణము మరియు U పరిమిత పరిమాణము అయితే T యొక్క వ్యాప్తి $V(F)$ యొక్క పరిమిత ఉపాంతరాళం అవుతుందని నిరూపించండి.

Or

- (b) State and prove Rank – Nullity theorem.

కోటి – శూన్యత సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

12. (a) Find the eigen values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక మూలాలు మరియు లాక్షణిక సదిశలు కనుక్కోండి.

Or

(b) State and prove Cayley – Hamilton theorem.

కేలే-హామిల్టన్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

13. (a) State and prove Cauchy – Schwarz inequality.

కోషి స్కార్జ్ అసమానతను ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

(b) State and prove Gram – Schmidt orthogonalization process.

అంతర్లబ్ధాంతరాళములో గ్రామ్ స్క్రిడ్జ్ లంబీకరణ పద్ధతిని ప్రవచించి నిరూపించుము.